Öğrenci Konu Notu 03 — Sayıların Atomları: Asal Sayılar

Bu derste neler öğreneceğim?

- Bir sayının pozitif çarpanlarını kullanarak asal mı, bileşik mi olduğunu açıklayacağım.
- 0, 1 ve 2 için neden özel bir karar verdiğimizi anlayacağım.
- Bir sayının bütün çarpan çiftlerini sistemli arayıp kararımın neden tamam olduğunu göstereceğim.

Kalbur çalışmasında: Elediğim bir sayının neden bileşik olduğunu açıklayacağım; incelediğim aralığın sınırını belirteceğim.

İkinci turda: İki sayının aralarında asal olup olmadığını ortak çarpanlarını karşılaştırarak açıklayacağım. Önce asal ve bileşik kararımı gerekçelendirmeyi tamamlayacağım.

İlk ders için 1–5. bölümlere, kısa özete ve 1–6. ders sonu sorularına odaklan. 6. bölüm ile 9–10. sorular ikinci tur içindir; 7–8. sorular isteğe bağlı derinleştirmedir.

1. Önceki dersten bir köprü

Ders 02'de 12 pul için 1 × 12, 2 × 6 ve 3 × 4 dikdörtgenlerini kurduk. Bunların her biri 12'nin bir **çarpan çifti**dir. Döndürülmüş düzenleri aynı sayıyoruz; çarpan listesini yazarken ise çiftin iki ucunu da alıyoruz.

Peki **13 pul** ile ne olur? 1 × 13 düzeni kurulabilir. İki veya üç eşit sıraya ayırmaya çalışınca pul artar. Başka bir çarpan çifti bulamayız. 12 ile 13 arasındaki farkı, çarpan listeleri de gösterir:

Sayı	Pozitif çarpanları
12	1, 2, 3, 4, 6, 12
13	1, 13

Dur ve Düşün

13'ün yalnızca 1 × 13 düzenini kurabilmemiz ile iki pozitif çarpanı olması arasında nasıl bir bağ var?

2. Asal ve bileşik ne demek?

1'den büyük bir doğal sayı, pozitif çarpanları yalnızca **1 ve kendisi** ise **asal sayıdır**. Bu iki çarpan birbirinden farklıdır. Örneğin 13 asaldır: çarpanları 1 ve 13'tür.

1'den büyük bir doğal sayının 1 ve kendisi dışında bir pozitif çarpanı da varsa sayı **bileşiktir**. Örneğin 12 bileşiktir; 2 × 6 düzeni, 1 ve 12 dışında çarpanlar verir.

9 da bileşiktir. 1 × 9'a ek olarak 3 × 3 düzeni vardır. 3'ü listede iki kez yazmayız; pozitif çarpanlar 1, 3 ve 9'dur. Bir çarpan çiftinin iki ucunun eşit olması, sayıyı asal yapmaz.

> **Temel fikir**
>
> Kararı sayının görünüşüne göre değil, **bütün pozitif çarpanlarına** göre ver. Asal için tam iki farklı pozitif çarpan gerekir.

3. 0, 1 ve 2 neden özel?

1 ne asal ne bileşiktir. Çünkü asal veya bileşik tanımı 1'den büyük sayılar içindir. Ayrıca 1'in yalnızca bir farklı pozitif çarpanı vardır: 1.

0 da ne asal ne bileşiktir. 0, 1'den büyük değildir. Bu derste asal veya bileşik diye sınıflandırdığımız sayılar 1'den büyük doğal sayılardır.

2 asaldır. Pozitif çarpanları yalnızca 1 ve 2'dir. 2, **tek çift asal sayıdır**. Çünkü 2'den büyük her çift sayı 2'ye kalansız bölünür; böylece 1 ve kendisine ek olarak 2 çarpanı bulunur.

> **⚠ Dikkat!**
>
> “Bütün tek sayılar asaldır” yanlıştır. 9 tektir ama 3 × 3 = 9 olduğundan bileşiktir. “1 asaldır” da yanlıştır: 1'in iki farklı pozitif çarpanı yoktur.

4. Bir sayıyı sistemli nasıl inceleriz?

29'u düşünelim. 1 × 29 her pozitif sayı için vardır; yeni bir düzen arıyoruz. Küçük kenarı sırayla 2, 3, 4 ve 5 olarak deneriz. 29'u bu sayılara kalansız bölemeyiz. İki kenar da en az 6 olsaydı en az 6 × 6 = 36 pul gerekirdi. 29 pulumuz olduğundan yeni bir dikdörtgen düzeni kalmaz. Demek ki 29'un pozitif çarpanları yalnızca 1 ve 29'dur; **29 asaldır**.

Bu yöntem “birkaç sayı denedim, herhalde asal” demekten güçlüdür. Hangi küçük kenarları denediğimizi ve neden daha büyük yeni bir kenar olamayacağını açıklarız. Bu derste özel bir karekök kuralı öğrenmemiz gerekmiyor; dikdörtgenin iki kenarını düşünüyoruz.

Çözümlü örnek A — 21'i sınıflandır

1 × 21 yanında 3 × 7 düzeni de vardır. 21'in pozitif çarpanları 1, 3, 7 ve 21'dir. **21 bileşiktir.** Bileşik olduğunu göstermek için 3 × 7 = 21 eşitliği yeterlidir.

Çözümlü örnek B — 17'yi sınıflandır

2 × 2 = 4, 3 × 3 = 9 ve 4 × 4 = 16; 17'de küçük kenar olarak 2, 3 ve 4'ü deneriz. Hiçbiri 17'yi kalansız bölmez. İki kenar da en az 5 olsaydı en az 25 pul gerekirdi. Bu nedenle yalnızca 1 × 17 kalır ve **17 asaldır**.

5. Eratosthenes kalburu: 1–30 arasında asalları bul

Sayıları sırayla yazıp bileşikleri eleme yöntemine **Eratosthenes kalburu** denir. Bir sayı "elekten geçiyormuş" gibi düşün; fakat kararı her zaman çarpanla gerekçelendir.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

1. **1'i ayır:** 1 ne asal ne bileşiktir; kalburun asal listesine girmez.
2. **2'yi daireye al:** 2'nin kendisini bırak, 4, 6, 8, …, 30'u çiz. Bunların hepsinin 2 dışında en az bir çarpanı vardır.
3. **3'ü daireye al:** 3'ün kendisini bırak, 6, 9, 12, …, 30'u çiz. Bazıları önceden çizilmiş olabilir; 9 yeni bir örnektir.
4. **5'i daireye al:** 5'in kendisini bırak, 10, 15, 20, 25, 30'u çiz. Burada yeni çizilen 25'tir: 5 × 5 = 25.
5. **7'yi kontrol et:** 7 × 7 = 49, yani 30'u aşar. 7'nin 30'a kadarki diğer katları zaten 2, 3 veya 5 aşamasında elenmiştir.

Geriye **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29** kalır. Bunlar 1–30 arasındaki asal sayılardır. 30'a kadar bileşik bir sayının iki çarpanı da 5'ten büyük olamaz; çünkü 6 × 6 = 36, 30'u aşar. Bu yüzden 2, 3 ve 5 ile eleme bu aralıkta yeterlidir. Kalbur yalnızca **seçtiğimiz aralıktaki** asalları verir; "bütün asal sayıları bulduk" demiyoruz.

6. İkinci tur — Aralarında asal olmak ne demek?

Bu bölüm ilk 40 dakikalık dersin çıkış biletinden sonra, öğretmenin yönlendirmesiyle veya ders sonrasında çalışılır. Önce bir sayının asal mı bileşik mi olduğunu çarpanlarıyla açıklayabildiğinden emin ol.

Bir sayının **asal olması**, o sayının kendi pozitif çarpanlarıyla ilgili bir karardır. **İki sayının aralarında asal olması** ise *iki sayının birlikte* incelenmesidir: Ortak pozitif çarpanları yalnızca **1** ise aralarında asaldırlar. İki sayının da tek başına asal olması gerekmez.

Örneğin 8'in pozitif çarpanları `1, 2, 4, 8`; 15'in çarpanları `1, 3, 5, 15` tir. İki listede ortak olan yalnızca 1'dir. **8 ve 15 aralarında asaldır**, oysa 8 de 15 de bileşiktir. Buna karşılık 8 ile 12'nin ortak çarpanları `1, 2, 4` olduğundan bu ikisi aralarında asal değildir.

Gruplama anlamı: 8 mavi ve 15 sarı pulu ayrı ayrı, her renkten artan kalmadan *aynı sayıda* eşit gruba dağıtmak isteseydik tek ortak grup sayısı 1 olurdu. 8 mavi ve 12 sarı pulda ise 2 veya 4 grup da kurabiliriz. “Ortak çarpan” yalnız bir liste oyunu değil, iki miktarı birlikte gruplama imkânıdır.

Sayı çifti	Ortak pozitif çarpanlar	Karar
8 ve 15	1	Aralarında asal
8 ve 12	1, 2, 4	Aralarında asal değil
5 ve 12	1	Aralarında asal
5 ve 15	1, 5	Aralarında asal değil

Dikkat: “5 asal olduğu için her sayıyla aralarında asaldır” yanlıştır; 5 ile 15 ortak 5 çarpanına sahiptir. İki *farklı* asal sayı ise aralarında asaldır: 5 ve 7'nin ortak çarpanı yalnızca 1'dir. Aynı asal sayıyı iki kez seçersek, örneğin 5 ve 5, ortak 5 çarpanı da vardır.

Bir adım daha: Art arda gelen iki pozitif doğal sayı da aralarında asaldır. Örneğin 14 ve 15'i 1'den büyük aynı sayıya böldüğünü varsayalım. Bu sayı, aralarındaki `15 − 14 = 1` farkını da bölmek zorunda kalır; 1'den büyük hiçbir sayı 1'i bölemez. Bu akıl yürütme yalnız bu örneğe değil, her ardışık çifte uygulanır.

> **Dur ve Düşün**
>
> 9 ile 10 aralarında asal mı? 9 bileşik olduğu hâlde kararın neden değişmiyor? Önce iki çarpan listesini yaz, sonra ardışık sayı gerekçesiyle kontrol et.

7. İleri Seviye — İsteğe bağlı

Birinin “37'yi 2, 3 ve 4 ile denedim; o hâlde asaldır” dediğini düşün. Kararı doğru olabilir, ama gerekçesi henüz tamamlanmamıştır. 5 ve 6 da denenmelidir. 37 bu sayılara da kalansız bölünmez. İki kenar da en az 7 olsaydı en az 7 × 7 = 49 pul gerekirdi. Böylece yeni çarpan çifti kalmaz ve 37'nin asal olduğu tamamlanmış bir gerekçeyle gösterilir.

Sayıların atomları benzetmesi yararlıdır: bileşik bir sayı, 1 ve kendisi dışında çarpan çiftleriyle kurulabilir. Fakat gerçek atomlardan söz etmiyoruz; bu bir matematik benzetmesidir. Asal çarpanlara ayırmayı sonraki derslerde inceleyeceğiz.

8. Kısa özet

- Asal sayı: 1'den büyük, tam iki farklı pozitif çarpanı olan doğal sayı.

- Bileşik sayı: 1'den büyük, 1 ve kendisi dışında da pozitif çarpanı olan doğal sayı.
- 0 ve 1 bu iki grupta değildir; 2 tek çift asaldır.
- Bileşikliği göstermek için yeni bir çarpan çifti yeterlidir. Asallığı göstermek için başka çift kalmadığını da açıklamalıyız.
- **İkinci tur:** Aralarında asal iki sayının ortak pozitif çarpanı yalnızca 1'dir; sayılar ayrı ayrı bileşik olabilir.

9. Ders Sonu Soruları

Önce kendin çöz. İlk altı soru temel dersle ilgilidir; 7–8 derinleştirme, 9–10 ise aralarında asallık üzerine ikinci tur sorularıdır. Yalnız “asal” veya “bileşik” yazma: gerekçeni de göster.

1. (OKN-01) 7 ve 10'un pozitif çarpanlarını ayrı ayrı yaz. Hangisi asal, hangisi bileşik? Neden?

Yanıtım: .....

.....

2. (OKN-02) 1, 2 ve 9'u asal / bileşik / ikisi de değil biçiminde sınıflandır. Her karar için kısa gerekçe yaz.

Yanıtım: .....

.....

3. (OKN-03) 15 pulun döndürme dışında farklı dikdörtgen düzenlerini yaz. Bu düzenlerden 15'in bütün pozitif çarpanlarını bul.

Düzenlerim ve kararım: .....

.....

4. (OKN-04) 27 ve 29'dan hangisi asaldır? Bileşik olan için yeni bir çarpan çifti göster; asal olan için başka çift kalmadığını açıkla.

Gerekçem: .....

.....

5. (OKN-05) “Tek olan her sayı asaldır” iddiasını bir karşı örnekle değerlendir. Karşı örneğin hangi çarpanları iddiayı çürütüyor?

Karşı örneğim: .....

.....

6. (OKN-06) 1'den 20'ye kadar olan doğal sayıları düşün. Bu aralıktaki asal sayıları yaz. 15 ve 16'nın neden listede olmadığını ayrı ayrı açıkla.

Listem ve gerekçem: .....

.....

İleri Seviye — İsteğe bağlı

7. (OKN-07) 35 ile 37'yi karşılaştır. 35 için bileşikliği bir eşitlikle göster. 37 için olası küçük kenarları sistemli deneyerek asallığı açıkla.

Açıklamam: .....

.....

8. (OKN-08) İki **farklı** asal sayının toplamı tek olabilir mi? Olabiliyorsa örnek ver. Hangi asal sayının toplamda bulunması gerektiğini tek–çift bilgisini kullanarak açıkla.

Örneğim ve gerekçem: .....

.....

9. (OKN-09) 8 ile 15 ve 8 ile 12 çiftleri için ortak pozitif çarpanları listele. Hangi çift aralarında asaldır? Çiftteki sayıların asal olup olmaması kararını tek başına belirler mi?

Listem ve gerekçem: .....

.....

10. (OKN-10) “Bir sayı asal ise seçtiğim her sayıyla aralarında asaldır” iddiasını 5 ile iki farklı sayı seçerek sınayıp gerekçelendir. Biri iddiayı desteklesin, diğeri çürütsün.

Örneklerim ve kararım: .....

.....