Öğrenci Konu Notu 04 — Bölünebilir mi?

Bu derste neler yapabileceğim?

- Bir sayının 2, 5 ve 10'a bölünüp bölünmediğini **birler basamağından** anlayıp gerekçelendireceğim.
- 3'e bölünebilmede rakamlar toplamının neden işe yaradığını basamak değerleriyle açıklayacağım.
- 9 kuralını aynı fikirle inceleyip bir kuralın tersini kontrol edeceğim.
- 4 için son iki basamağı, 6 için 2 ve 3 koşullarını birlikte kullanıp neden yeterli olduklarını anlatacağım.
- Birden çok koşulu aynı sayıda sınayıp yanlış bir genellemeye karşı örnek bulacağım.

1. Bölünebilme neyi anlatır?

24 nesneyi altışarlı gruplara ayırınca dört grup olur ve hiç nesne artmaz: `24 = 6 × 4`. Bu yüzden **24, 6'ya kalansız bölünür**; 6, 24'ün bir çarpanıdır. 25 nesneyi altışarlı gruplarsan bir nesne artar: `25 = 6 × 4 + 1`. Dolayısıyla 25, 6'ya kalansız bölünmez.

> ⚠ **Dikkat**
>
> Buradaki bölenler sıfırdan farklı pozitif doğal sayılardır. Sıfıra bölme yapılmaz. `0`, her pozitif sayıya kalansız bölünür (`0 = d × 0`), fakat sıfır bölen olarak kullanılamaz.

2. Birler basamağı neden yeterli olabilir?

`248 = 24 × 10 + 8`. İlk 24 onluk hem 2'şerli hem 5'erli hem 10'arlı gruplara artansız ayrılabilir. Kararı yalnız kalan **8 birlik** belirler:

Bölen	Birler basamağında aranacak rakam	Neden?
2	0, 2, 4, 6, 8	Onluklar zaten 2'ye bölünür; son rakam da çift olmalı.
5	0 veya 5	Onluklar 5'e bölünür; son rakam 0 ya da 5 olmalı.
10	0	Onluklardan sonra birlik artmamalı.

Örnek: 235'in son rakamı 5'tir; 5'e bölünür, 2'ye veya 10'a bölünmez. 240'ın son rakamı 0'dır; üçünün de katıdır. `2 × 5 = 10` olduğu için 2 ve 5'e **birlikte** bölünen bir doğal sayının son rakamı 0 olur.

Dur ve Düşün

316'nın başındaki 31 onluğun tek/çift olmasına neden bakmıyoruz? `31 × 10` ifadesini 2'ye bölmeyi dene.

Kalanla kontrol: 248'i 5'erli grupladığımızda 24 onluk, 5'e bölündüğü için karar 8 birlikten gelir. `8 = 5 + 3`; dolayısıyla 248'i 5'e bölersek 3 artar. Kural yalnız “evet/hayır” demez, artanın nereden geldiğini de gösterebilir.

3. Rakamlar toplamı 3 için neden çalışır?

`231 = 2 × 100 + 3 × 10 + 1`. Yüzlüğün içindeki `99`, onluğun içindeki `9` üçer üçer tam gruplanır:

`231 = 2 × 99 + 3 × 9 + (2 + 3 + 1)`.

İlk iki parça 3'e kalansız bölündüğü için son parça, yani **rakamlar toplamı 6**, kararı verir. 6, 3'e bölünür; öyleyse 231 de 3'e bölünür. `232` için toplam 7'dir; 3'e bölünmez.

Binlik için de `1000 = 999 + 1` olduğundan aynı düşünce sürer. **Bir doğal sayı, rakamları toplamı 3'e bölünüyorsa 3'e bölünür.** Tersi de doğrudur: 3'e bölünen sayının rakamları toplamı da 3'e bölünür.

Çözümlü örnek

4 305 için `4 + 3 + 0 + 5 = 12`; 12 üçerli gruplanır. Bu nedenle 4 305, 3'e bölünür. Son rakam 5 olduğu için 5'e de bölünür, fakat 2'ye ve 10'a bölünmez.

4. Aynı düşünce 9 için de geçerli mi?

`10 = 9 + 1`, `100 = 99 + 1`, `1000 = 999 + 1`: 9'un katlarından sonra her basamakta bir birlik kalır. Bu nedenle **rakamlar toplamı 9'a bölünen sayı 9'a bölünür** ve tersi de doğrudur. Örneğin `729` için `7 + 2 + 9 = 18`; 18 hem 3'ün hem 9'un katıdır.

9'a bölünen her sayı 3'e de bölünür, çünkü 9 üç tane 3'tür. **3'e bölünen her sayı 9'a bölünmez:** 12'nin rakamları toplamı 3'tür; 12, 3'e bölünür fakat 9'a bölünmez.

İki yönü ayır

18'in rakamları toplamı 9'dur ve kendisi de 9'a bölünür. 12'nin toplamı 3'tür. Bu iki örnek “9'a bölünürse 3'e bölünür” ile “3'e bölünürse 9'a bölünür” cümlelerinin neden aynı olmadığını nasıl gösterir?

5. 4'e bölünmek için neden son iki basamağa bakarız?

Bir sayıyı yüzlükler ve geriye kalan **son iki basamak** olarak ayırabiliriz: $1\,248 = 12 \times 100 + 48$. Yüzlüklerin hepsi 4'e bölünür; çünkü $100 = 4 \times 25$ tir. Bu yüzden yalnız 48'i incelemek yeterlidir. $48 = 4 \times 12$, öyleyse **1 248, 4'e bölünür**. $1\,246$ için son iki basamak 46'dır; $46 = 4 \times 11 + 2$, dolayısıyla 4'e bölünmez.

Kural: Son iki basamağın oluşturduğu sayı 4'e kalansız bölünüyorsa bütün sayı da 4'e bölünür. 00, 4'e bölünür; örneğin 1 200 bölünür. Tek basamaklı bir sayıyı düşünürken önüne 0 koyabilirsin: 8 için son iki basamağı 08 gibi oku. 8 bölünür, 6 bölünmez.

Sayı	Son iki basamak	Karar ve gerekçe
316	16	$16 = 4 \times 4$; bölünür.
318	18	$18 = 4 \times 4 + 2$; bölünmez.
1 204	04	$4 = 4 \times 1$; bölünür.

> ⚠ **Sık yanılgı**
>
> “Son rakamı çiftse 4'e bölünür” yanlış. 14 çifttir fakat $14 = 4 \times 3 + 2$. 4'e bölünen her sayı 2'ye de bölünür; tersi doğru değildir.

6. 6'ya bölünmek için iki koşul neden birlikte gerekir?

$6 = 2 \times 3$ olduğundan 6'nın her katı hem **çift** hem de **3'ün katıdır**. Tersi de geçerlidir: Bir sayı 3'ün katıysa $3 \times k$ biçimindedir. Bu sayı çift olduğunda k de çift olmak zorundadır; çünkü tek k ile tek 3'ün çarpımı tek olur. O hâlde $k = 2 \times m$ yazabiliriz ve sayı $3 \times 2 \times m = 6 \times m$ olur. Bu yüzden **bir doğal sayı hem 2'ye hem 3'e bölünüyorsa 6'ya bölünür**.

Pratikte iki soruyu sırayla sor: **Son rakam çift mi? Rakamlar toplamı 3'e bölünüyor mu?** 234 için son rakam 4, rakamlar toplamı $2 + 3 + 4 = 9$; iki koşul da doğru ve $234 = 6 \times 39$. 224 çifttir ama rakamlar toplamı 8'dir; 6'ya bölünmez. 225 in rakamlar toplamı 9'dur ama sayı tektir; yine 6'ya bölünmez.

> 🔥 **Önemli ayrım**
>
> “2 ve 3'e bölünürse 6'ya bölünür” kuralını her iki bölen için körü körüne kullanma. Örneğin 12 hem 2'ye hem 4'e bölünür; fakat 8'e bölünmez. İki koşulun birlikte neden yeterli olduğunu ayrıca gerekçelendirmeliyiz.

7. Aynı sayıda birden çok kuralı nasıl kullanırım?

Önce hangi basamağa baktığını söyle, sonra karar ver. `1 260` sayısında son rakam 0 olduğu için 2, 5 ve 10'a bölünür. Son iki basamak `60 = 4 × 15` olduğu için 4'e bölünür. Rakamlar toplamı `1 + 2 + 6 + 0 = 9` olduğu için 3 ve 9'a bölünür. Hem 2 hem 3 koşulu sağlandığından 6'ya da bölünür. **Tek bir sayı yedi kuralı birden sağlayabilir.**

`1 248` ise 2 ve 4'e bölünür, fakat rakamlar toplamı 15 olduğu için 3'e bölünürken 9'a bölünmez; 2 ve 3 koşulları birlikte sağlandığı için 6'ya da bölünür. Son rakamı 8 olduğu için 5 veya 10'a bölünmez. Kararlarını tek tabloda toplamak, bir koşulu unutmanı önler.

Bölen	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**9**	**10**
Hızlı kontrol	Son rakam çift	Rakamlar toplamı 3'ün katı	Son iki basamak 4'ün katı	Son rakam 0 veya 5	2 **ve** 3 birlikte	Rakamlar toplamı 9'un katı	Son rakam 0

Neden tablonun satırları farklı? 2, 5 ve 10 için onlukların; 4 için yüzlüklerin; 3 ve 9 için `10 = 9 + 1` biçimindeki parçaların nasıl gruplandığına baktık. 6'yı ise iki doğru koşulu birleştirerek bulduk. Bunlar ezber cümleleri değil, basamak sisteminden çıkan kısa yollardır.

> **Kontrol alışkanlığı**
>
> Kuralı sayı yerine koyarak sınamayı unutma. “Sonu 5 ise 5'e bölünür” derken **doğal sayı** ve **pozitif bölen** koşullarını koruyoruz.

Kendim deneyim — bağımsız sorular

Çözümleri önce kendi düşüncenle yaz. Bağımsız soruların cevapları bu notta yer almaz.

1. (OKN-01) 248, 255 ve 270 sayılarını 2, 5 ve 10'a bölünebilme bakımından bir tabloya yerleştir. 270 için üç kararını da açıkla.

2. (OKN-02) 432 ve 431 sayılarından hangisi 3'e bölünür? Rakam toplamlarını göster.

3. (OKN-03) `231 = 2 × 100 + 3 × 10 + 1` eşitliğinden yararlanarak 231'in 3'e neden bölündüğünü kendi sözlerinle açıkla. Aynı açıklama 232'ye neden uymaz?

4. (OKN-04) `4□2` sayısındaki kutuya hangi rakamlar yazılırsa sayı 3'e bölünür? Bütün olasılıkları yaz. Tek yanıt mı var?

5. (OKN-05) 135 ve 930 sayılarının 2, 3, 4, 5, 6, 9 ve 10'dan hangilerine bölündüğünü gerekçelendir. Her sayı için önce son rakamı, sonra son iki basamağı, sonra rakamlar toplamını incele.

6. (OKN-06) Bir öğrenci “0, 5'in katı değildir; çünkü hiç beşli grup yapamadım” diyor. `0 = 5 × 0` eşitliğini kullanarak iddiayı değerlendir. Sıfır bölen olabilir mi?

Biraz Daha Düşün! — seçmeli

7. (OKN-07) “Bir sayı hem 2'ye hem 5'e bölünüyor ama 10'a bölünmüyor” iddiası doğru olabilir mi? Son rakamdan hareketle açıkla.

8. (OKN-08) `7□4` sayısı 9'a bölünsün. Kutuya hangi rakam gelmeli? Kararını rakamlar toplamıyla ve çarpma işlemiyle kontrol et.

9. (OKN-09) 316 ve 318'in ikisi de çifttir. Hangisi 4'e bölünür? Son iki basamakla açıkla; “çift olmak 4 için yeterlidir” iddiasını değerlendir.

10. (OKN-10) 234, 224 ve 225 sayılarının her biri için 2 ve 3 koşullarını ayrı ayrı kontrol et. Hangileri 6'ya bölünür? Yalnız bir koşulu sağlayanları da göster.

11. (OKN-11) 1 260 sayısını 2, 3, 4, 5, 6, 9 ve 10 bakımından incele. Her “evet” kararının hangi basamak ya da iki koşuldan çıktığını yaz.

12. (OKN-12) “Hem 2'ye hem 4'e bölünen her sayı 8'e de bölünür” iddiası doğru mu? 12'yi sınayarak bir karşı örnek yaz. Bu durum neden 2 ve 3'ten 6'ya geçişle aynı değildir?

Özet

Basamakların yapısını bildiğimizde uzun bölme gerekmeden karar verebiliriz. 2, 5 ve 10 için son rakam; 4 için son iki basamak; 3 ve 9 için rakamlar toplamı kullanılır. 6 için hem 2 hem 3 koşulunu ararız. Kuralların gücü, ezberlenmelerinden değil **neden çalıştıklarının** açıklanabilmesinden gelir. Tüm başlıkları tek oturuşta bitirmek zorunda değilsin; önce temel kuralları çalış, 4 ve 6 ile çoklu kararları ikinci turda dene.