Öğrenci Konu Notu 05 — Bir Sayının DNA'sı: Asal Çarpanlar

Bu derste neler yapabileceğim?

- Bileşik bir sayıyı iki çarpana ayırıp işlemi asal sayılara ulaşıncaya kadar sürdüreceğim.
- Çarpan ağacında dalları farklı seçsem de aynı asal çarpanların çıktığını örnekle kontrol edeceğim.
- Tekrarlanan asal çarpanları çarpım ve üslü gösterimle yazacağım.
- Asal çarpan ile herhangi bir çarpanı ayıracak; 1 ve 0 için sınırı söyleyeceğim.

1. Parçalamayı nerede durdururuz?

Bir önceki derste 30'un 2, 3 ve 5'e bölündüğünü gördük. Şimdi onu çarpım olarak yazalım: `30 = 5 × 6 = 5 × 2 × 3`. Son satırdaki 2, 3 ve 5 **asaldır**: her birinin yalnız 1 ve kendisi olmak üzere iki farklı pozitif çarpanı vardır. 6 ise `2 × 3` olarak parçalanabildiği için son durak olamaz.

Asal çarpanlarına ayırmak, 1'den büyük bir doğal sayıyı yalnız asal sayıların çarpımı olarak yazmaktır. Çarpımda aynı asal sayı birden çok kez bulunabilir. `12 = 2 × 2 × 3`; yalnız `2 × 3` yazarsak 6 elde ederiz, 12 değil.

> ⚠ **Dikkat**
>
> 1 asal sayı değildir; onu ağacın ucuna “asal çarpan” diye yazmayız. Bu derste pozitif ve 1'den büyük sayıları asal çarpanlarına ayırıyoruz. 0 için böyle sonlu bir asal çarpan listesi kurmuyoruz.

2. Çarpan ağacı nasıl kurulur?

72'yi önce `8 × 9` diye ayıralım. `8 = 2 × 4 = 2 × 2 × 2`, `9 = 3 × 3`. Dalların ucunda `2, 2, 2, 3, 3` kalır:

`72 = 2 × 2 × 2 × 3 × 3`.

Aynı sayıya `72 = 6 × 12` diye başlayabilirdik. `6 = 2 × 3` ve `12 = 2 × 2 × 3`; yine **üç tane 2, iki tane 3** buluruz. Başlangıç farklı, son çarpım aynı. Bir dalın ucunda bileşik sayı kaldıysa iş bitmemiştir.

Kontrol alışkanlığı: Uçlardaki sayıları çarp. Sonuç başlangıçtaki sayıya eşit olmalı. Yalnız çarpımın eşit olması da yetmez: uçların *hepsi asal* olmalı.

Dur ve düşün

`45 = 5 × 9` yazan bir arkadaşın “Bitti” diyor. Hangi dalı sürdürmeli? Tamamlandığında kaç tane 3 bulur?

3. Tekrarlanan çarpanları kısa yazma

`72 = 2 × 2 × 2 × 3 × 3` ifadesindeki üç tane 2'yi `2³`, iki tane 3'ü `3²` diye yazarız: **`72 = 2³ × 3²`**. Burada 3 ve 2, çarpanın kaç kez kullanıldığını söyler. `2³ = 2 × 2 × 2 = 8`; `3² = 3 × 3 = 9`; `8 × 9 = 72`.

Üs 1 olduğunda onu yazmak zorunda değiliz. `60 = 2 × 2 × 3 × 5 = 2² × 3 × 5`. “2³” ile “2 × 3” aynı şey değildir; üs yalnız hemen solundaki tabanı tekrarlar.

Sayı	Tek tek asal çarpanlar	Kısa yazılış	Çarpımla kontrol
36	`2 × 2 × 3 × 3`	`2² × 3²`	`4 × 9 = 36`
84	`2 × 2 × 3 × 7`	`2² × 3 × 7`	`4 × 3 × 7 = 84`
90	`2 × 3 × 3 × 5`	`2 × 3² × 5`	`2 × 9 × 5 = 90`

4. Çarpan, asal çarpan ve tekrar sayısı

12'nin pozitif çarpanları `1, 2, 3, 4, 6, 12` dir. **Asal çarpanları** ise yalnız `2` ve `3` tür. “Asal çarpanlar hangileri?” sorusunda 2'yi bir kez söyleriz; “asal çarpanlarına ayır” dendiğinde `12 = 2 × 2 × 3` diye 2'yi gerektiği kadar tekrarlarız. 4 bir çarpandır ama asal değildir.

Bir asal sayının ayrışımı kendisidir: `13 = 13`. 1'in asal çarpanı yoktur. Bu ayrım ileride iki sayının ortak bölenlerini anlamamıza yardım edecek.

Çözümlü örnek

48'i 2'ye böle böle ayır: `48 = 2 × 24 = 2 × 2 × 12 = 2 × 2 × 2 × 6 = 2 × 2 × 2 × 2 × 3`. Böylece `48 = 2⁴ × 3`. Kontrol: `16 × 3 = 48`.

5. İki ağaç neden aynı sonuca ulaşır?

Bir bileşik sayıdaki iki çarpan da başlangıç sayısından küçüktür. Bu yüzden parçalamayı sürdürdüğümüzde sonunda asal sayılara varırız. Hangi çarpan çiftini önce seçtiğimiz, çarpma sırasını değiştirebilir; 72 örneğinde görüldüğü gibi sonuçtaki asal çarpanlar ve tekrar sayıları değişmez. Bu **tekliğe** küçük sayılarda farklı ağaçlar çizerek güven kazanabiliriz; genel ispatı bu dersin konusu değildir.

`2 × 2 × 3 × 9` ifadesi 108 eder ama tamamlanmış asal ayrışım değildir; 9'u `3 × 3` yapmalıyız. Sonuç `108 = 2² × 3³` olur.

> **Kendini denetle**
>
> (1) Her yaprak asal mı? (2) Yaprakların çarpımı ilk sayıya eşit mi? (3) Üslü biçimde her tekrar doğru sayılmış mı?

6. Sonraki derse köprü

`84 = 2² × 3 × 7`, `90 = 2 × 3² × 5`. Her iki ayrışımda da 2 ve 3 görünür. Ancak 84'te iki tane 2, 90'da bir tane 2 vardır; ortak bir çarpım kurarken yalnız **her ikisinde de bulunan** kopyaları kullanabiliriz. Bu fikir bir sonraki derste en büyük ortak böleni bulmamıza yardım edecek. Şimdilik bütün ortak bölenleri listeleyerek de kontrol edebilirsin.

Kendim deneyim — bağımsız sorular

Yanıtları önce kendi başına yaz. Bu bölümün çözümleri öğrenci sitesinde yayımlanmaz.

1. (OKN-01) 48'i asal çarpanlarına ayır. Ağacın bütün uçlarının asal olduğunu ve çarpımın 48 ettiğini göster.

2. (OKN-02) `90 = 9 × 10` başlangıcını tamamla. Sonucu tek tek çarpanlarla ve üslü biçimde yaz.

3. (OKN-03) 72 için biri `8 × 9`, diğeri `6 × 12` ile başlayan iki ağaç kur. Sonuçları karşılaştır.

4. (OKN-04) `108 = 2 × 2 × 3 × 9` yazan bir arkadaşın hangi dalı tamamlamadı? Doğru üslü gösterimi yaz.

5. (OKN-05) “12'nin asal çarpanları 2, 3 ve 4'tür.” iddiasını değerlendir. Çarpan ile asal çarpan arasındaki farkı açıkla.

6. (OKN-06) 84 ve 90'ı asal çarpanlarına ayır. İkisinde de bulunan asal sayıları ve ortak kopya sayılarını belirt.

Biraz Daha Düşün! — seçmeli

7. (OKN-07) `120 = 2³ × 3 × □` eşitliğinde kutunun yerine hangi asal sayı gelir? Çarpımla kontrol et.

8. (OKN-08) “Bir sayı çiftse bütün asal çarpanları 2'dir.” iddiasına karşı örnek kur ve ayırma işlemiyle göster.