Öğrenci Konu Notu 06 — Buluşma Noktası: EBOB ve EKOK

Bu derste neler yapabileceğim?

- İki sayının ortak pozitif bölenlerini ve pozitif katlarını ayrı listelerden bulacağım.
- En büyük ortak böleni (EBOB) eşit paylaşım, en küçük ortak katı (EKOK) buluşma problemiyle ilişkilendireceğim.
- Asal ayrışımlarla bulduğum sonucu liste ve çarpımla kontrol edeceğim.
- “En büyük” ile “en küçük” sözlerinin hangi kümede kullanıldığını açıklayacağım.

1. Önce iki farklı soru

Paylaşım: 12 kırmızı ve 18 mavi pul, hiç artmadan aynı içerikli paketlere konacak. En fazla kaç paket yapılabilir? Paket sayısı hem 12'yi hem 18'i bölmelidir. 12'nin pozitif çarpanları `1,2,3,4,6,12`; 18'inkiler `1,2,3,6,9,18`. Ortak bölenler `1,2,3,6`. En büyüğü **6**dır; altı paketin her birine iki kırmızı, üç mavi pul düşer.

Buluşma: Biri 12, diğeri 18 dakikada bir çalan iki zil aynı anda çalıyor. Başlangıçtan *sonraki* ilk ortak çalma kaç dakika sonra? 12'nin pozitif katları `12,24,36,48,…`; 18'inkiler `18,36,54,…`. İlk ortak pozitif kat **36**dır.

İki soruda “ortak” sözü var; fakat birinde **bölen**, öbüründe **kat** arıyoruz. Başlangıç anı 0 da ortak çalma anıdır, ama “sonraki ilk” için 0'ı değil ilk **pozitif** ortak katı seçeriz.

2. EBOB: ortak bölenlerin en büyüğü

18'in bölenleri `1,2,3,6,9,18`, 24'ün bölenleri `1,2,3,4,6,8,12,24`. Ortak bölenleri `1,2,3,6`dır. **EBOB(18,24)=6**. 6 her iki sayıyı da kalansız böler. 12, 24'ü böler ama 18'i bölmez; “büyük” olması yetmez, önce ortak olmalı.

Yöntem: (1) Her sayının pozitif bölenlerini eksiksiz yaz. (2) İki listede de bulunanları işaretle. (3) Bu kısa listenin en büyüğünü seç. Listeleme küçük sayılarda güvenilir bir kontroldür.

> ⚠ **Dikkat**
>
> “En büyük bölen” demiyoruz; **en büyük ortak bölen** diyoruz. Her sayının kendisi bölenidir ama diğer sayıyı bölmeyebilir.

3. EKOK: ortak pozitif katların en küçüğü

8'in katları $8,16,24,32,40,48,\ldots$; 12'ninkiler $12,24,36,48,\ldots$. Ortak pozitif katlar 24, 48, … diye gider. **EKOK(8,12)=24**. İlk karşılaştığımız ortak sayıyı seçeriz. $8 \times 12=96$ da ortaktır, fakat en küçük değildir.

Kontrol: $24 \div 8=3$ ve $24 \div 12=2$. 24'ten küçük pozitif 8 katları 8 ve 16'dır; ikisi de 12'nin katı değildir. Bu yüzden daha küçük bir ortak pozitif kat yoktur.

> **Dur ve düşün**
>
> 6 ile 9 için “6×9=54, öyleyse EKOK 54” diyen öğrenci hangi küçük ortak katı atladı?

4. Aynı çift için iki sonuç

20 ve 30'u inceleyelim. 20'nin bölenleri $1,2,4,5,10,20$; 30'unkiler $1,2,3,5,6,10,15,30$. Ortak bölenler $1,2,5,10$; **EBOB=10**. Pozitif katlar arasında 20,40,60 ve 30,60 bulunur; **EKOK=60**.

Sayı çifti	EBOB	EKOK	Doğrulama
12 ve 18	6	36	6 ikisini böler; 36 ikisinin katıdır.
8 ve 12	4	24	4 ikisini böler; 24 ikisinin katıdır.
20 ve 30	10	60	10 ikisini böler; 60 ikisinin katıdır.

EBOB sayılardan büyük olamaz; EKOK sayılardan küçük olamaz (pozitif sayılar için). Bu iki sınır sonucu denetlemekte işe yarar; ama tek başına doğru yanıtı kanıtlamaz.

5. Asal çarpanlarla ikinci yol

Ders 05'te $18=2 \times 3^2$, $24=2^3 \times 3$ yazmayı öğrendik. Her iki sayıda bulunan kopyaları seçersek **bir 2 ve bir 3**, yani $2\times3=6$ elde ederiz: EBOB. Her iki sayının ihtiyacını da karşılayacak kadar kopya seçersek **üç 2 ve iki 3**, yani $2^3\times3^2=72$ elde ederiz: EKOK. Burada örneğin $72\div18=4$, $72\div24=3$; küçük ortak pozitif kat olmadığını kat listeleriyle de görürüz.

Asal sayı	18'de kaç kez?	24'te kaç kez?	Ortak bölen için	Ortak kat için
2	1	3	1	3
3	2	1	1	2

Kısa kuralı ezberlemeye başlamadan nedenini söyle: **Ortak bölen**, iki sayıdan birinde olmayan kopyayı kullanamaz. **Ortak kat**, sayılardan birinin istediği kopyayı eksik bırakamaz. Aynı mantık başka asal sayılar için de geçerlidir.

> **Çarpımla sınama**
>
> Pozitif iki sayı için `EBOB × EKOK = sayıların çarpımı`. 18 ve 24'te `6 × 72 = 432`, `18 × 24 = 432`. Bu eşitlik iyi bir **kontrol**dür; listenin veya asal kopyaların neden doğru seçildiğini anlatmanın yerini tutmaz.

6. Aralarında asal sayılar

8'in pozitif çarpanları `1,2,4,8`; 15'inkiler `1,3,5,15`. Ortak tek bölen 1 olduğundan **EBOB(8,15)=1** ve sayılar aralarında asaldır. İki sayının kendisinin asal olması gerekmez: 8 ve 15 bileşiktir. Ortak asal çarpanları olmadığından ilk ortak pozitif kat `8×15=120` olur.

> **Karıştırma**
>
> EBOB=1 olması “iki sayının da asal” olduğu anlamına gelmez. EKOK her zaman çarpım da değildir: 8 ve 12'nin EKOK'u 24'tür, 96 değil.

7. Sorunun dilinden yönteme geç

“**En fazla** kaç eşit içerikli paket?” sorusunda paket sayısı her miktarı bölmelidir: ortak bölen, sonra en büyüğü. “**İlk kez yeniden** birlikte ne zaman?” sorusunda süre ikisinin de katı olmalıdır: ortak pozitif kat, sonra en küçüğü. Kelimeleri kör ezberleme; hangi niceliğin bölen veya kat olduğunu cümleyle açıkla.

Örneğin 24 kırmızı ve 36 mavi bilyeden aynı içerikli **en çok** 12 paket yapılır; pakette `24÷12=2` kırmızı ve `36÷12=3` mavi bulunur. 6 ve 8 dakikada bir çalan iki alarm aynı anda saat 09.00'da çalarsa sonraki birliktelik `EKOK(6,8)=24` dakika sonra, **09.24**tedir.

Kendim deneyim — bağımsız sorular

Yanıtla birlikte liste, asal kopya veya bölme-çarpma gerekçesi yaz.

1. (OKN-01) 18 ve 24'ün ortak pozitif bölenlerini listele. EBOB'u ve neden daha büyük ortak bölen olmadığını söyle.

2. (OKN-02) 8 ve 12'nin 50'ye kadar pozitif katlarını yaz. İlk ortak pozitif kat hangisi?

3. (OKN-03) 20 ve 30 için EBOB ile EKOK'u iki ayrı yöntemle bul. Sonuçlarını çarpımla kontrol et.

4. (OKN-04) 9 ve 15 dakikada bir yapılan iki etkinlik aynı anda başlıyor. Bir sonraki ortak başlangıç kaç dakika sonra? Neden ortak bölen aramadın?

5. (OKN-05) 8 ve 15 aralarında asal mı? Her ikisi bileşik olmasına rağmen kararını ortak bölenlerle açıkla.

6. (OKN-06) 12 ve 18 için `EBOB × EKOK = 12 × 18` eşitliğini sayısal olarak kontrol et. Bu kontrol tek başına “en küçük” ve “en büyük” olduğunu ispatlar mı?

Biraz Daha Düşün! — seçmeli

7. (OKN-07) 24 kırmızı ve 36 mavi boncuktan hiç artırmadan aynı içerikli en çok kaç paket yapılır? Bir paketin içeriğini yaz.

8. (OKN-08) 6 ve 8 dakikada bir çalan iki alarm 09.00'da birlikte çaldı. Bir sonraki ortak çalma saat kaçta? Başlangıç anını neden yanıt saymadın?